統計学講義ノート
文化経済学会＜日本＞
蓼科サマーセミナー用

八木　匡

イントロダクション：経済学における統計

- 日本の経済統計
  総務省統計局
  http://www.stat.go.jp/data/index.htm
  内閣府
  http://www.esri.cao.go.jp/index.html

センサス(Census)：国勢調査、事業所統計調査
各種統計のサンプリングにおける台帳

第1回

- データの種類：量的情報と質的情報

量的な情報とは—＞身長とか体重、試験の得点

質的な情報とは—＞婚姻状態とか家の所有の有無

量的な情報と質的な情報では、統計的扱い方がことなり、数値の意味も異なる。

例：婚姻の有無は、0または1という数値で置く。
　　内閣への支持の度合いを4段階で回答

質的データの特徴

- 質的情報を0，1，2，3、といった数値で表現する。例としては、家を保有している場合に1、保有していない場合に0という数値をとる。または、内閣を大変よく支持しているを4、全く支持して以内を1として、1から4の数値を当てはめる。この時、数値の差は意味を持たない。

１．１　データの代表値

- 統計学の本質は、標本から母集団の性質を推測することである。
- 　例として、内閣支持率の調査を行う。母集団は国民全体であり、標本は電話調査とかインターネット調査によって収集される。
- 標本は、無作為抽出される→標本は確率変数である。
- 　例として、内閣支持率の標本抽出方法を考えたときに、政治的性向に偏りがない調査が必要

確率変数とは？

- 確率的に発生する変数を確率変数という。標本を無作為抽出によって取り出す場合には、どの標本が選ばれるかは確率的である。例えば、経済学部生の授業出席状況を乱数表とIDを対応させて標本抽出する場合、選ばれたIDは確率的に決定されてくる。
- 従って、標本は確率変数である。

確率変数

- 標本を確率変数x_iで表現する。iは第i番目の標本を意味する。標本数をnとすると、標本集団Sは、

  $S=\{x_1,x_2,x_3,\ldots.x_n\}$

で表現されることになる。

統計的推測とは、このn個の標本から母集団の性質を推定することである。

データの中心を表す代表値

- 標本平均値（mean）
- 標本平均値 $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
- 注意すべき点は、x_iが確率変数であることから、標本平均値も確率変数となる。

中央値と最頻値

- 中央値は、データを小さいものから順番に並べたときの真ん中の値。
- 最頻値は、最もよく現れる値
- データの中心を表す代表値として、何がベストか？
- 情報を最も多く利用しているのは、標本平均値であるが、分布に偏りが激しい場合には問題が生じる。

例

- {168, 149, 159, 187, 175}

というデータを順番に並べ替えると、

{149, 159, 168, 175 , 187}

となる。真ん中の数値は、168である。これが中央値である。標本平均は167.6となる。

貯蓄データとか所得データのように、分布の右すそが広い場合には、平均は中央値よりも大きくなり、平均は必ずしも代表値として望ましくない。

データの広がりを示す代表値

- 標本分散（不偏分散）

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

母集団分散

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

どこが違うのか？

1. 標本平均はn-1で割るのに対し、母集団分散はnで割る。
2. 偏差自乗和を計算する式に、標本平均がはいるか、母集団平均が入るかが違う。

自由度(Degree of Freedom, df)

- n個の標本から作られる標本空間はn次元空間である。これは自由度がnであることを意味する。
- しかしながら、このn次元空間に1本の制約式が加わると、標本空間の自由度はn-1になる。
- 一般に、n次元の標本空間に、k個の制約式が加わると、標本空間の自由度はn-kとなる。
- 標本分散の場合、標本平均が一つの線形制約となり、自由度がn-1となる。従って、標本分散は偏差自乗和をn-1で割る方が、偏りの無い母分散推定量となる。

標準偏差(Standard deviation)

- 分散の平方根を標準偏差と呼ぶ。
- 標本分散の平方根を標本標準偏差と呼ぶ。

四分位点と十分位点

- 観測値全体を小から大に並べたときの25%目の値を第1四分位点、75%目の値を第3四分位点と呼ぶ。
- 第1四分位点と第3四分位点との間の範囲を四分位範囲と呼ぶ。
- 分布の状況を把握するのにしばしば用いるのが10%,25%,50%,75%,90%点である。

度数分布表

- データの分布状態を把握するための表
- 階級分けが必要
- 階級分けは、「下限以上上限未満」が基本。
- 相対度数は、各階級の度数を観測個数（標本数）で割ったもの。
- 累積度数は、度数を最も小さな階級から足し合わせたもの。最大の階級では、総観測個数。
- 累積相対度数は、相対度数を最も小さな階級から足し合わせたもの。最大の階級では常に1.

度数分布表作成時の注意

- 階級数決定の目安として、スタージェスの公式がある。

 階級数＝1＋3.3×log n（対数は常用対数、即ち底が10）

 例：nが1000の場合の階級数は？

 10を何乗したら1000になるでしょうか？答えは3です。ですから、log 1000は3です。従って、階級数は、1 + 3.3 x 3 = 10.9となり、ほぼ11が目安となります。

階級幅の設定

- 階級幅は等間隔にすることが望ましい。ただし、所得分布のように、等間隔では原データの性質を的確に表現できない場合がある。例えば、所得データでは、1000万円未満では、100万円の間隔で階級幅を取り、1000万円以上では200万円を間隔にとり、2000万円以上では500万円を間隔に取る方法がしばしば採用される。

棒グラフとヒストグラム

- 棒グラフは、階級別の度数なり、相対度数を高さで表現する。
- ヒストグラムは、特殊な棒グラフで、棒の面積が度数または相対度数に対応して決められる。
- 階級幅が等しい時には、棒グラフはヒストグラムと同一となる。
- 階級幅が異なっている場合には、棒グラフはヒストグラムにならない。
- 相対度数によるヒストグラムの総面積は1となる。

累積相対度数分布のグラフ

- 累積相対度数は、最も小さな階級の相対度数を足し合わせたものである。従って、左端は0という値を取り、右端は1という値を取る。
- 累積相対度数分布のグラフを用いると、10%,25%,50%,75%,90%点といった点をすぐに見つけることができる。

離散データ

- 例として、出生率がある。子供の数は離散データであり、0，1，2，3といった正の整数値を取る。
- 合計特殊出生率（しゅっしょうりつ：しばしば「しゅっせいりつ」と誤る）

これは、一人の女性が一生に生む子供の数。15歳以上49歳までの各年齢別一人当たり出生率を求め、その総和によってある女性の生涯出生数と理解。

変数の標準化

- 平均が$\bar{x}$、標準偏差がσの確率変数xを、平均0、標準偏差1の確率変数zに変換することを、変数の標準化と呼ぶ。
- 標準化された確率変数をzとすると、

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

となる。このz_iが平均0、標準偏差1となることを確認しなさい。

偏差値

- 偏差値は、50＋10×z_i
  で定義される。

練習問題：英語の試験で、平均が60点、標準偏差が10点であった。75点の人の偏差値を求めなさい。

答：75点を標準化には、(75-60)/10を計算すれば良い。この値は、1.5となる。したがって、偏差値は、50+10×1.5=65となる。

偏差値はなぜ便利なのか？

- 平均と標準偏差の情報を含んでいるため、分布における相対的な位置を知ることができる。今の例題では、75点という得点のみでは、相対的に高いのか低いのかはわからない。しかし、偏差値が65ということで、分布の上位にあることが理解できる。
- この偏差値を比較すれば、平均と分散が異なった分布の間で比較が可能となる。

2変数データの整理

- 散布図：2つの変数の間の関係を図的に把握することができる。2つの変数の間に正の関係がある場合、正の相関があるといい、負の関係がある場合には負の相関があるという。
- 相関係数

  標本相関係数は、標本共分散をxの標本標準偏差とyの標本標準偏差で割ったものである。

標本共分散と相関係数

- 標本共分散

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

- 相関係数

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{S_x S_y}$$

相関係数の性質

- 正の場合、正の相関
- 負の場合、負の相関
- 相関係数は絶対値が1に近いほど強い相関を示す。
- 相関係数は線形関係における関係の強さを表すのであって、円等の非線形の関係の強さについては、適用できない。
- 相関係数は、因果性については何も語らない。

正規分布

- 左右が対称で、裾が無限に広がるが、裾での密度は0に限りなく近づく。
- パラメターは平均μと分散σ^2
- 平均0で分散1の正規分布を標準正規分布と呼ぶ。
- 標準正規分布表で確率を求めることができる。
- 例題：平均60点、標準偏差15点で、50点以下の人は何パーセントか？
- 確率変数の標準化の式より、この問題の50点は、(50-60)/15となる。

正規確率変数の標準化

- 平均μ、標準偏差σの正規確率変数Xを考える。
 この正規確率変数が区間(a,b)に入る確率を求めよ。

○ 解法

確率変数の標準化 $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{s}$

区間a,bは、それぞれ標準化すると、どのような値になるのか？

第4章　標本分布

- 母集団から標本を抽出し、標本から母集団の性質を推測することが統計的推測となる。
- このためには、母集団の性質と標本の性質がどのような関係にあるかを知る必要がある。

無作為抽出と無作為標本

- 標本抽出の場合、無作為抽出（ランダムサンプリング）することによって、恣意性を取り除くことができる。
- しかし、意図的でないにしても、偏りのある標本抽出が行われる場合が少なくない。（サンプルセレクションバイアスの問題）

例：学生への出席率調査を教室で実施。

　教室にいる学生はそもそも出席率が高い学生である可能性が高い。教室にいない学生が出席率の低い学生とすると、その情報が入らない。

サンプルセレクションバイアスの生じないサンプリング

- 例：家計調査では、層化3段抽出法（第1段—市町村，第2段—単位区，第3段—世帯）により 世帯を選定している。この方法により、日本のさまざまな地域の情報を偏りなく集めることができる。

  また、精度を高めるために、調査員が家計構成等の家計属性を含む世帯票の記入については、面接調査で実施している。

政府統計等の集計データを用いる場合の注意：

- どのような調査方法で、どのような対象で調査を行ったかを確認する必要がある。このような調査自体の特性を認識した上で、データを用いることが必要である。
- そのため、統計書の前書きおよび調査の説明部分は一度は目を通し、調査票自体も確認することが必要である。

統計量

- 確率変数$X_1,X_2,...,X_n$の関数$s(X_1,X_2,...,X_n)$を統計量という。統計値と区別する。統計量は、計算方法と考えてよい。例として、平均計算であれば、$\{X_1+X_2+...+X_n\}/n$は統計量であり、実際に計算した値は統計値である。
- 関数sの例を考えてみてください。

標本平均の分布（最重要ポイント）

- 例として、昨晩の睡眠時間を、復元抽出で調査することを考える。
- 300人いるクラスで、20名ずつ昨晩の睡眠時間を聞くという試行を、復元抽出で繰り返し行う。復元抽出であるので、同じ人間が何度も質問に答えることが可能である。復元抽出を行う場合には、無限母集団からの標本抽出と同じことになる。

続き

- 第1回目の標本抽出 のデータ

  {5,8,9,7,3,4,5,6,4,7,8,9,7,3,6,6,5,7,4}

  第2回目の標本抽出 のデータ

  {7,8,3,5,2,9,4,6,7,5,6,7,5,6,8,3,6,6,8}

  第m回目の標本抽出 のデータ

  {8,8,4,7,6,5,7,8,8,6,5,4,6,7,5,7,5,3,6}

  それぞれについて、標本平均を計算する。1回目の標本平均をBar(X_1),m回目をBar(X_m)とする。実際計算すると、5.94,5.84,6.05となる。

標本平均の分布

- 標本を取り出して、標本平均を計算するという試行を繰り返す場合、標本平均の分布が生成されることになる。
- 母分布の分散が大きくても、標本平均の分散は小さくなる。前述の例でも、標本平均は、5.94, 5.84, 6.05といったように、散らばりは小さくなっている。このように、標本平均の分布の分散は、母分布の分散よりも小さくなることがわかる。

確認したいポイント

- 「標本平均の分布」という概念をイメージできるか？
- これは、Xの分布と $\bar{X}$ の分布を混同しないことを意味している。

標本平均の分布の平均と分散

- 定理4.1(最重要定理：p.125)の意味すること。

母分布の平均がμで、分散がσ^2とする。このとき、この母分布から取り出された標本の平均の分布は、平均μで分散がσ^2/nとなる。

定理4.1は、母分布の形状がどのようなものであっても成立することを述べている。また、標本平均の分布の形状については、何も述べていない。

定理4.2　正規分布の再生性

- 定理4.2(p.130)はどのような意味をもっているのか？

→母分布が正規分布であれば、母分布から取り出した標本の平均（標本平均）の分布は正規分布になる。

→母分布が正規分布ならば、標本数に依存しないで、標本平均の分布も正規分布になる。

これは、定理4.2系(p.130)で記されている。

定理4.4　大数の法則1

- 意味：

→ 標本数が十分に大きくなれば、標本平均は母平均μと一致する。

定理4.6　中心極限定理(最重要定理)

- 意味:

母分布がどのような分布であっても、標本数が十分に大きければ、標本平均の分布は正規分布で近似できる。

→定理4.2系では、母分布が正規分布であれば、標本数が少なくても、標本平均の分布が正規分布になることを示した。中心極限定理は、標本数が十分に大きい場合に、母分布が何であっても標本平均の分布が正規分布で近似できるといっている。

続き

- 中心極限定理は、母分布の形状がわからない場合でも、標本平均の分布を正規分布と考えても良いことを保証している。

「標本数が十分に大きければ、標本平均は平均μ、分散σ^2/nの正規分布に従う」

という表現となる。

なぜ、中心極限定理は重要か？

- 一般に、母分布がどのような分布であるかは分からない。その場合でも、中心極限定理を用いると、標準正規分布を用いた推定と検定が可能となる。この定理がなければ、推定とか検定ができない場合が多くなると考えられる。
- 標本数が十分に大きいと言ったときに、「十分に大きい」とはどれくらいですか？厳密な回答は困難だが、30程度。

注意点：t分布との関連

- 母分布が正規分布であると判断できる場合で、母分散が未知であれば、標本数が30未満の小標本ケースでは、標本平均の分布はt分布（後に説明）に従うことが知られている。正規分布の再生性では、母分散が分かっているケースで、小標本でも標本平均の分布が正規分布となることを述べている。

t分布（重要）

- 正規母集団から得られる標本について考える。
- 要するに、母集団が正規分布であると考えられる場合に適用できる議論。
- $t=Z/\sqrt{(W/k)}$

の右辺は、すべて正規確率変数から作られている。kは標本数。Wはχ^2確率変数。

このtはt分布に従う。

t分布の特徴

- 標本数が50を超えると、ほぼ正規分布と一致する。
- 小標本の場合には、裾が正規分布よりも厚くなる。すなわち、正規分布を少し平たくした形である。

どのような時にt分布を使うのか？

- 正規母集団から標本を採ったときに、母分散が分かっていれば、標本平均を標準化した変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

は、正規分布となる。

t分布をいつ使うのか（2）

しかし、母分散が分かっていないと、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$$

は、分母と分子に共に確率変数が入ることになり、自由度n-1のt分布に従うことになる。

標本平均の分布

		母分散	
		既知	未知
母分布	正規分布	定理4.2系より、小標本でも正規分布となる。	t分布（自由度はn-1）
	未知	中心極限定理より正規分布	中心極限定理より正規分布

t分布はなぜ重要か？

- 計量経済学では、誤差項が正規分布に従っていると仮定してパラメター推定を行う。誤差項の分散は未知であるので、t統計量で検定を行う。
- 実務的に、母分散が分かっていることは少ない。また、標本数が多ければ、t分布は正規分布と一致する。小標本であれば、t分布を用いたほうが、分布の裾が厚い分、安全な検定ができる。t分布を用いることのデメリットは無い。
- したがって、SPSSなどは、検定はt検定を使う場合が多い。

5　母数の推定

- 平均の推定（分散は既知）

 点推定：母数を1個の数値で定める。

 区間推定：信頼度を与えて、区間で母数を定める。

- 点推定の例：標本平均は、望ましい性質を持った母平均の推定量！

（推定量とは、標本から母数を対応させる関数であり、推定値は実際に標本の値を関数に代入して得られる値。）

推定量の望ましい性質（1）

- 不偏性

推定量の数学的期待値が母数と一致する。

標本平均の例で言うならば、標本平均の数学的期待値が母平均になることをさす。

標本が平均μ、分散σ^2の正規分布から得られている場合、標本平均の分布の平均は母平均μに一致する。

推定量の望ましい性質（2）

- 一致性

 観測個数nが無限大に増えたときに、推定量が母数に一致することを意味する。標本平均は、大数の法則で示したように、一致推定量である。

推定量の望ましい性質（3）

- 最小分散不偏推定量

 標本平均は、不偏推定量の中で分散が最小となる推定量であることが知られている。

 それでは、直感的に最大値と最小値を外して平均を取った場合に比べて、標本平均が最小分散を与えると考えられるのか？→σ^2をn-2で割るよりもnで割った方が小さい値をとる。→標本平均は、母平均の線形推定量の中で、最小分散を与える不偏推定量である。

補足

- 不偏推定量の中で最小の分散をもつ不偏推定量を有効推定量（Efficient　estimator）と呼ぶ。あるいはこれを最小分散不偏推定量または最良(best)推定量とも呼ぶ。
- 標本平均が一般に有効推定量であるという保証はない。しかし母集団が正規分布であれば標本平均は有効推定量である。

区間推定

- 標準正規分布表から

  P({a≦Z≦b})=0.95

  となる、aとbを求めなさい。ここでZは、標準正規確率変数とし、 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$

  で与えられる。 $\bar{X}$ は標本平均である。

  標準正規分布表で、0.975という確率を与える点を求めると、b=1.96を得る。正規分布は左右対称であるので、a=-1.96を得る。

95%信頼区間（母分散既知）

- aとbの値と、Zの式を代入して、式変形をする。すると、

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得ることになる。母平均μに関する信頼係数95%の信頼区間を得たことになる。

95%信頼区間（母分散未知）

自由度n-1のt分布を用いる。

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

を得ることになる。母平均μに関する信頼係数95%の信頼区間を得たことになる。

分布が未知の場合の区間推定

- 母分布が未知でも、定理4.1から標本平均は不偏性を満足し、大数の法則から一致性を満たすことが分かっている。さらに、中心極限定理より、標本数が十分に多ければ、標本平均は正規分布に従うことが知られている。

例5.2の意味

- 信頼係数が高いと、区間推定が成功する確率は高くなる。
- しかし、信頼区間は広くなってしまう。
- 実務上は、広い信頼区間は意味を持たない可能性がある。（例：数学得点の信頼区間が0点以上100点未満は無意味。）
- 従って、実務上意味のある情報を与える信頼係数の選択が必要となる。

例:PISA(Programm for international student assessment)を用いた区間推定

- PISA2006の日本の数学得点は、公立高校で平均528点、標準誤差が3.21点であった。私立高校では、平均が512点、標準誤差(σ/√n)が7.47点であった。公立と私立の数学得点の母平均を90%と95%の信頼係数で区間推定しなさい。
- 答え：公立は、95%で521.71≦μ≦534.29
- 90%で522.72≦μ≦533.28
- 私立は、95%で497.36≦μ≦526.64
- 90%で499.71≦μ≦524.29

続き

- 公立高校の標準誤差は私立高校の標準誤差よりも小さい。理由として考えられるのは、公立高校の得点の標準偏差が私立よりも小さいことと、公立高校からの標本数が私立高校からの標本数よりも多いことが考えられる。

  →信頼区間は公立よりも私立で大きくなる。
- 同じ信頼係数でも、真の平均が公立と私立で逆転する可能性が見て取れる。

5.2 信頼区間の性質

- 信頼区間を狭くしたほうが実務上情報としての価値が高くなる。
- 信頼区間を狭くするには、

（1）信頼係数を下げる。

（2）標本数を増大させる。

5.6 観測個数nの決定

- 例(5.18)式を用いて、ビデオ・リサーチ社が実施する視聴率調査のモニター数を求める。
- ここでは、15%の視聴率の周りで95%の信頼係数で視聴率が1%の誤差となるようなモニター数を計算する。
- $n=(1.96*\sqrt{(0.15*0.85)}/0.01)^2=4898$
- ただし、90%信頼係数で、2%の誤差ならば、モニター数は862となる。

6　仮説検定の基礎

- 例：商店街のくじで、売り子が「半分は当たりだよ」といって、声をかけています。6人の仲間でくじを買ったのですが、全員ハズレでした。この時、

（1）私たちは、運が無い

と考えるか、

（2）「半分は当たり」はうそ

と考えるか、どちらですか？

仮説検定の考え方

- ½が当たりとした時に、6人ともハズレの確率は、(1/2)^6=0.0156となり、極めて低い確率である。これほど低い確率でしか生じないのであれば、そもそも(1/2)が当たりということを否定することが自然な判断。
- ここで、「半分は当たり」ということを帰無仮説として、帰無仮説から出発して、データが発生する確率を計算し、それが非常に小さければ、帰無仮説を棄却するという考え方が検定の考え方。

6.1　平均値の検定（分散は既知）

- 2種類の仮説
- $H_0 : \mu = \mu_0$
（帰無仮説と呼ぶ。帰無の意味は、「無に帰する」であり、棄却することを目的とした仮説を意味する）
$H_a : \mu \neq \mu_0$
（対立仮説と呼ぶ。帰無仮説が棄却された場合に成立する仮説）

検定統計量

- 検定の場合の確率変数は、標本平均である。
- 帰無仮説($H_0:\mu=\mu_0$)の下、標本平均の平均はμ_0であり、分散はσ^2/nである。
- 標準化された標本平均は、

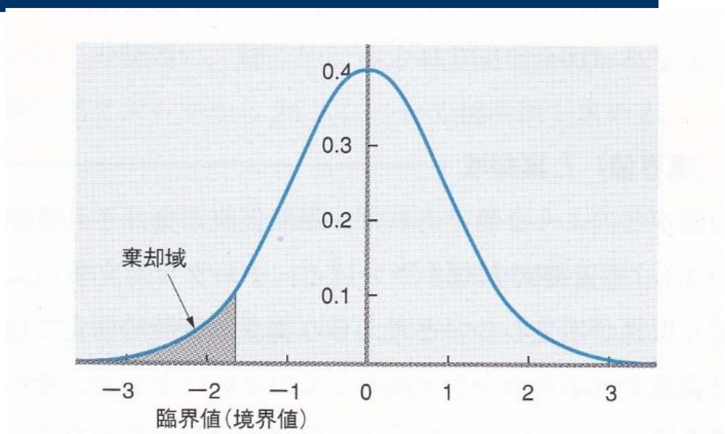
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

実際に発生したデータが、帰無仮説で与えたμの下で、どの程度の確率で発生するかを与えることができる。

臨界値

- 帰無仮説が正しいとして、標本平均が発生する確率を計算する場合、標準化された標本平均（検定統計量）が、与えられた有意水準（危険率）の下で求められる臨界値を超えていれば（棄却域に入っていれば）、帰無仮説を棄却する。標本平均の分布（正規分布、t分布など）が与えられたとき、有意水準に対応した確率値を与える点が臨界値。

臨界値（片側検定）



棄却の判断

- 検定統計量Zが棄却域に入れば、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択される。
- 入らなければ、帰無仮説は採択。

対立仮説の種類

H_a: μ<3.1

片側検定を意味する対立仮説

有意水準がαで与えられたときに、分布の左裾 100α%点が臨界値を与える。

H_a: μ≠3.1

両側検定を意味する対立仮説

有意水準がαで与えられたときに、分布の両側 100(α/2)%点が臨界値を与える。

片側検定と両側検定の違いは？

- 両側検定の方が、棄却する臨界値が同じ有意水準でも絶対値で大きくなる。5%の有意水準であれば、正規分布で片側検定の臨界値は1.645または-1.645であるのに対し、両側検定では1.96と-1.96となる。

検定のステップ

- 帰無仮説と対立仮説を立てる。
- 帰無仮説が正しいとして、検定統計量を計算する。
- 有意水準が与えられたときに、対応する臨界値を求める（片側検定か両側検定かに注意）。
- 検定統計量が絶対値で臨界値を上回れば（棄却域に入れば）、帰無仮説を棄却。
- 帰無仮説が棄却されれば、対立仮説が採択。

P値

- 臨界値を与えて、検定統計量が棄却域に入るか否かで、検定を行う方法の他に、実際のデータが発生する確率を計算して、それが有意水準よりも小さい場合に、帰無仮説を棄却するという方法での検定方法がある。
- 帰無仮説の下で実際に生起したデータが発生する確率をP値と呼ぶ。
- 実際には、検定統計量Zが与える確率をP値と呼ぶ。Z=-2.5でのP値は、0.0062となる。

6.2　平均値の検定（分散未知）

- 正規母集団の場合（t検定）
- 帰無仮説および対立仮説の立て方は同じ。
- 検定統計量は、標本標準偏差を用いて計算。
- 検定統計量はt統計量であり、t分布に従う。

例6.2

- 帰無仮説　$H_0 : \mu=1200$
  対立仮説　$H_a: \mu>1200$

標本数n=100、標本平均1230、標本標準偏差120.

この問題で、標本平均の分布として何を考えるのか？→母分散が未知で、標本分散が分かっている場合には、t検定をまずは考える。$T=(1230-1200)/(120/10)=2.5$

しかし、この問題では標本数が100であるので、正規分布で考えても良い。

続き

P値は、正規分布で、0.0062、t分布（自由度99)では表に値が無いので正確には不明。標本数100で、1%片側検定の臨界値がどの程度異なるかを調べる。すると、正規分布では2.33、t分布で2.364

この問題では、T=2.5であるので、正規分布でも、

t分布でも帰無仮説は棄却される。

注：母分散未知の場合、大標本で母分布が未知であれば、正規分布による検定。小標本であれば、母分布が正規分布と明記していなくともt分布による検定という考え方をとる場合が多い。

6.3 平均値の差の検定

- 標本平均の差Dが、確率変数である。
- 標本平均の差Dの分布がどのような分布に従うのか？
- 帰無仮説は平均値は等しいである。従って、標本平均の差の分布の平均は、帰無仮説から出発した場合、0である。
- 標本平均の差の分布の分散は

$$V(D) = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$